

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Пирназаров Ғ. Ф, Хожаматов С. Ш, Журакулова Ф. С
Ташкентский государственный транспортный университет

При определении критических сил для систем с степенями свободы статическим методом предусматривается определенная последовательность в решении задач.

1. Исследуемая система рассматривается в новой форме равновесия (возмущенном состоянии), отличной от исходной, но бесконечно к ней близкой.
2. Для новой формы равновесия составляются n линеаризованных уравнений равновесия.
3. Записывается условие ненулевого решения системы этих уравнений в виде равенства нулю определителя системы (уравнение устойчивости).
4. Решая уравнение устойчивости, находят n значений нагрузки, наименьшее из которых является критическим.

С математической точки зрения задача отыскания критических сил для системы с конечным числом степеней свободы представляет собой задачу о нахождении наименьшего собственного числа матриц, коэффициентов линеаризованной системы уравнений равновесия, составленных для возмущенного состояния системы.

Каждому корню (собственному числу) уравнения устойчивости соответствует своя собственная форма равновесия. Только форма равновесия, соответствующая наименьшему корню (критической силе), является устойчивой. Отыскание форм равновесия сводится к нахождению собственных векторов матрицы, коэффициентов системы уравнений равновесия.

1.1 Расчет системы с одной степенью свободы

Пример 1. Абсолютно жесткий стержень (рис. 1.1, а) прикреплен к земле с помощью упругого шарнира жесткостью C . Найти критическое значение силы F , приложенной вдоль его оси на верхнем торце.

Решение. Новая форма равновесия стержня, полученная путем его поворота вокруг точки O на угол φ , показана на рис. 1.1, б.

Для этой новой формы запишем уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точки O , учитывая, что в упругом шарнире возникает момент C_φ :

$$Fl\sin\varphi - C_\varphi = 0 \quad (1.1)$$

Так как угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$, и тогда вместо нелинейного уравнения (1.1) получаем следующее линеаризованное уравнение:

$$(Fl-C)\varphi=0 \quad (1.2)$$

Условием ненулевого решения уравнения (1.2) будет равенство

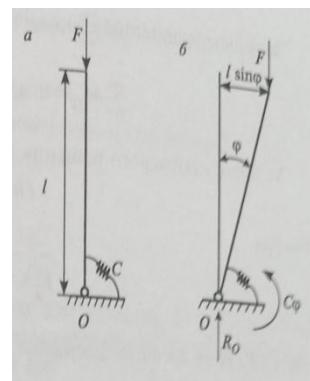


Рис. 1.1

$$Fl - C = 0,$$

Откуда и находится критическое значение нагрузки $F_k = \frac{C}{l}$.

Пример 2. Найти критическую силу для рамы (рис. 1.2, а), у которой вертикальный стержень абсолютно жесткий, а жесткость горизонтального стержня конечна и равна EJ .

Решение. Возмущенное состояние рамы, связанное с поворотом вертикального стержня вокруг точки O на угол φ , показано на рис. 1.2, а пунктиром. Реакции в опорах O и B можно найти, используя таблицы методом перемещений. Стержень OB рассматривается при этом как балка, имеющая на левом конце заделку, а на правом – шарнирное опирание (рис. 1.2, б). При повороте заделки на угол φ

$$R_B = \frac{3i}{l}\varphi.$$

Запишем уравнение равновесия в виде

$$\sum M_O = 0 \text{ или } Fh\varphi - \frac{3i}{l}\varphi l = 0.$$

Условие ненулевого решения относительно φ :

$$Fh - 3i = 0$$

откуда

$$F_k = \frac{3i}{h} = \frac{3EJ}{lh}.$$

где $i = EJ/l$ – погонная жесткость.

Пример 3. Определить критическую силу для рамы, изображенной на рис. 1.3. Продольной деформацией горизонтального стержня пренебречь.

Решение. Положение стрежней рамы в возмущенном состоянии изображено на рис. 1.3 пунктиром. Реактивный момент в опоре (как и в предыдущей задаче) может быть найден с помощью таблиц метода перемещений; он равен $3i(l\varphi)/l$.

Составляя уравнение равновесия в виде $\sum M_O = 0$, имеем

$$Fh\varphi - \frac{3i(l\varphi)}{l} = 0.$$

Условие ненулевого решения относительно φ следующее:

$$Fh - 3i = 0,$$

откуда
$$F_k = \frac{3i}{h} = \frac{3EJ}{lh}.$$

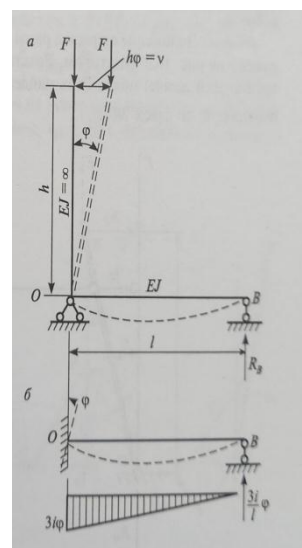


Рис.1.2

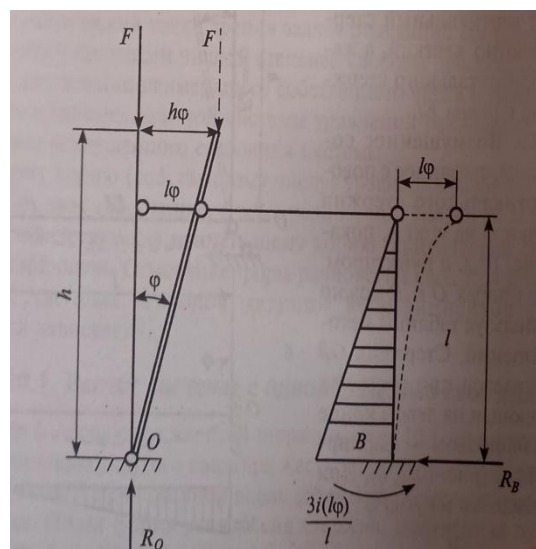


Рис.1.3

Пример 4. Найти критическую силу для колонны (стержня OE на рис. 1.4), удерживаемой в вертикальном положении двумя наклонными тросами с продольной жесткостью EA .

Решение. При повороте стержня на малый угол φ (рис. 1.4, б) усилие возникает только в растянутом тросе BC . Это усилие можно найти, зная горизонтальное перемещение точки B (BB_1 на рис. 1.4, б):

$$BB_1 = \frac{h}{2} * \sin\varphi = \frac{h\varphi}{2}.$$

Проекция этого перемещения на новое направление троса BC равна его удлинению Δl . Считая, что $\sin\alpha_1$ (рис. 1.4, б) в силу малости угла φ равен $\sin\alpha$, получим:

$$\Delta l = BB_1 \sin\alpha = \frac{h\varphi}{2} \sin\alpha,$$

после чего находим усилие N в тросе BC :

$$N = \frac{\Delta l EA \sin\alpha}{2l}.$$

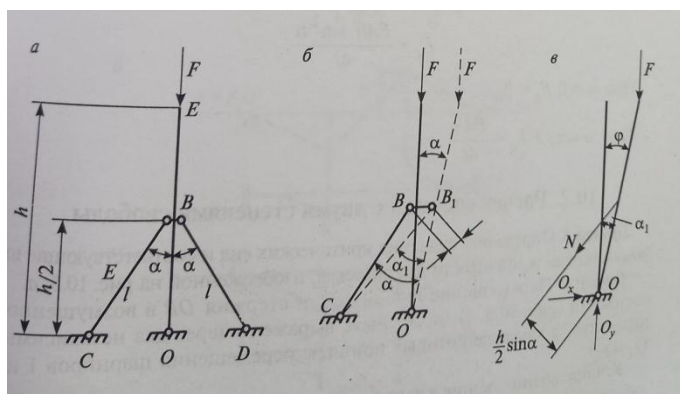


Рис 1.4

Составляя уравнение равновесия для колонны в наклонном положении (рис. 1.4, в) в форме $\sum M_0 = 0$, получим:

$$N = \frac{h}{2} \sin\alpha - Fh\varphi = 0$$

или

$$\left(\frac{EAh * \sin^2\alpha}{4l} - F \right) \varphi = 0.$$

Условия ненулевого решения для φ :

$$\frac{EAh * \sin^2\alpha}{4l} - F = 0.$$

Из него находим

$$F_k = \frac{EAh * \sin^2\alpha}{4l}$$

При $\alpha = 0$ $F_k = 0$.

При $\alpha = \pi/2$ $F_k = \frac{EAh}{4l}$.

1.2 Расчет системы с двумя степенями свободы

Пример 5. Определить значения критических сил и соответствующие им формы потери устойчивости для системы, изображенной на рис. 1.5, а.

Решение. Перемещение любой точки стержня OB в возмущенном состоянии (рис. 1.5, б)

может быть выражено через два независимых параметра, в качестве которых приняты перемещения шарниров 1 и 2 (y_1 и y_2).

Усилия, возникающие в вертикальных стержнях, находят с помощью таблиц метода перемещений. Они равны реакциям шарнирных опор балок (рис. 1.5, в), у которых данные опоры смещаются на величины y_1 и y_2 относительно заделок.

На рис. 1.5, г показаны все силы, действующие на стержень OB в возмущенном состоянии. Реакции в опорах O и B находят из условий равенства нулю моментов в шарнирах 1 и 2:

$$R_O = -\frac{Fy_1}{l_1}; R_B = -\frac{Fy_2}{l_2};$$

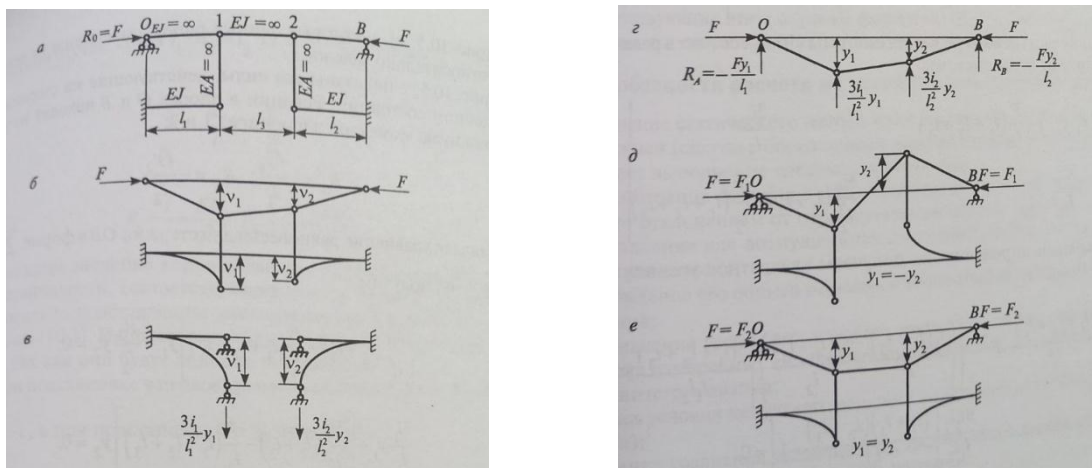


Рис.1.5

Составляя уравнение равновесия для стержня OB в форме $\sum M_O = 0$ и $\sum M_B = 0$, получим:

$$\left[\frac{3i_1}{l_1^2} (l_2 + l_3) - \frac{F}{l_1} (l_1 + l_2 + l_3) \right] y_1 + \frac{3i_2}{l_2} y_2 = 0;$$

$$\frac{3i_1}{l_1} y_1 + \left[\frac{3i_2}{2} (l_1 + l_3) - \frac{F}{l_2} (l_1 + l_2 + l_3) \right] y_2 = 0. \quad (1.3)$$

Условие ненулевого решения системы (1.3) состоит в равенстве нулю определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{3i_1}{l_1^2} (l_2 + l_3) - \frac{F}{l_1} (l_1 + l_2 + l_3) & \frac{3i_2}{l_2} \\ \frac{3i_1}{l_1} & \frac{3i_2}{2} (l_1 + l_3) - \frac{F}{l_2} (l_1 + l_2 + l_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно F .

$$\frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2}{l_1 l_2} F^2 - \left[\left(\frac{i_1 (l_2 + l_3)}{l_1} + \frac{i_2 (1 + l_3)}{l_2} \right) \right] \frac{3(l_1 + l_2 + l_3)}{l_1 l_2} F + \frac{9i_1 i_2}{l_1 l_2} \left[\frac{(1 + l_3)(l_2 + l_3)}{l_1 l_2} - 1 \right] = 0 \quad (1.5)$$

В частном случае, когда $l_1 = l_2 = l_3 = l$ и $i_1 = i_2 = i$, вместо (1.5) будем иметь

$$F^2 - \frac{4i}{l} F + \frac{3i^2}{l^2} = 0,$$

Откуда

$$F_1 = \frac{i}{l} = \frac{EJ}{l^2}; F_2 = \frac{3i}{l} = \frac{3EJ}{l^2}.$$

Наименьшее значение корня является критической силой. Формы потери устойчивости, соответствующие каждой из сил F_1 и F_2 , найдем, последовательно подставляя их значения вместо F в любое из уравнений системы (1.3). Использовать оба уравнения не представляется возможным, так как они будут линейно зависимыми.

Так, при подстановке в первое уравнение системы (1.3) $F = F_1$ получим $\frac{y_2}{y_1} = -1$, а при подстановке $F = F_2$ имеем $\frac{y_2}{y_1} = 1$.

Соответствующие этим случаям формы потери устойчивости (кососимметричная и симметричная) приведены на рис. 1.5, d , e .

1.3 Особенности расчета на устойчивость упругих стержней

Применение статического метода к исследованию устойчивости упругих стержней (систем с бесконечным числом степеней свободы) предусматривает выполнение следующих операций:

1. рассмотрение стержня в возмущенном состоянии, характеризующемся его отклонением от первоначальной формы равновесия;
2. составление для возмущенного состояния дифференциального уравнения равновесия;
3. нахождение его общего решения с точностью до постоянных интегрирования;
4. составление граничных условий, представляющих собой систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования;
5. запись условия ненулевого решения этой системы (уравнение устойчивости);
6. решение уравнения устойчивости, наименьший корень которого соответствует критическому значению нагрузки.

Для решения задач, содержащихся в настоящем пункте, можно воспользоваться дифференциальным уравнением равновесия для сжато – изогнутого стержня постоянной жесткости:

$$EJv^{IV} + Fv^{II} = 0 \quad (1.6)$$

и его общим решением

$$v = C_1 + C_2\beta z + C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z, \quad (1.7)$$

где $\beta^2 = \frac{F}{EJ}$; C_1, \dots, C_4 – постоянные интегрирования.

Для записи общего решения можно применить метод начальных параметров, выразив все постоянные через v_0, θ_0, M_0, Q_0 (соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила), отнесенные к недеформированному состоянию стержня:

$$v = v_0 + \frac{\theta_0}{\beta} \sin \beta z - \frac{M_0}{\beta^2 EJ} (1 - \cos \beta z) - \frac{Q_0}{\beta^3 EJ} (\beta z - \sin \beta z) + \sum_{i=1}^n \parallel_{z>z_i} \frac{\Delta\theta_0}{\beta} \sin \beta (z - z_i) - \frac{\Delta M_0}{\beta^2 EJ} [1 - \cos \beta (z - z_i)] - \frac{\Delta Q_0}{\beta^3 EJ} (\beta (z - z_i) - \sin \beta (z - z_i)), \quad (1.8)$$

где $\Delta\theta_0, \Delta M_0, \Delta Q_0$ – приращения функций угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы на границах участков, n – число границ между участками, z_i – координата i – й границы.

Пример 6. Определить критическую силу для стержня, жестко защемленного на нижнем конце и шарнирно – опертого на верхний (рис. 1.6).

Решение. Используем общее решение (1.7) в уравнении (1.6).

Граничные условия:

$$v(0) = 0; v'(0) = 0; v(l) = 0; v''(l) = 0. \quad (1.9)$$

Найдем первые две производные от v по z :

$$v' = C_2\beta + C_3\beta\cos\beta z - C_4\beta\sin\beta z; \quad (1.10)$$

$$v'' = -C_3\beta^2\sin\beta z - C_4\beta^2\cos\beta z. \quad (1.11)$$

Подстановка значений v, v', v'' в граничные условия (1.9) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0; \\ C_2\beta + C_3\beta &= 0; \\ C_1 + C_2\beta l + C_3\beta l + C_4\cos\beta l; & \quad (1.12) \\ -C_2\beta^2\sin\beta l - C_4\beta^2\cos\beta l &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы (1.12) следует:

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_1; \\ C_3 &= -C_2. \end{aligned}$$

Подстановка этих значений C_3 и C_4 в последние два уравнения системы (1.12) дает:

$$\begin{aligned} (1 - \cos\beta l)C_1 + (\beta l - \sin\beta l)C_2 &= 0; \\ \cos\beta l \cdot C_1 + \sin\beta l \cdot C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Запишем условие ненулевого решения системы (1.13):

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos\beta l) & (\beta l - \sin\beta l) \\ \cos\beta l & \sin\beta l \end{vmatrix} = 0. \quad (1.14)$$

Раскрывая определитель (1.14), получим:

$$\sin\beta l - \beta l \cos\beta l = 0. \quad (1.15)$$

Полагая, что $\cos\beta l \neq 0$ (при $\cos\beta l = 0$ система (1.13) имеет нулевое решение), разделим обе части уравнения (1.15) на $\cos\beta l$, что дает

$$\operatorname{tg}\beta l - \beta l = 0, \quad (1.16)$$

откуда путем подбора находим $\beta l = 4,493$, или

$$l\sqrt{\frac{F}{EJ}} = 4,493.$$

Следовательно,

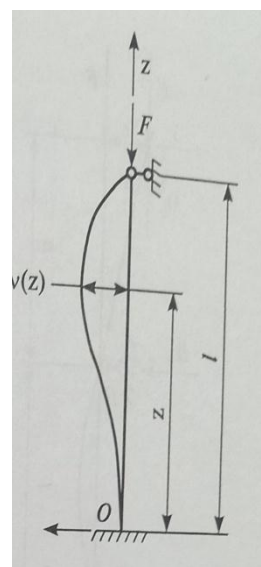


Рис.1.6

$$F_k = \frac{4,493^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}.$$

Пример 7. Определить критическую силу для стержня с консолью (рис. 1.7)

Решение. Используется метод начальных параметров. Начальные параметры v_0, θ_0 .

Уравнение изогнутой оси стержня записывается с применением формулы (1.8):

$$v = v_0 + \frac{\theta_0}{\beta} \sin \beta z - \int_{z>a} \frac{\Delta Q}{\beta^2 EJ} [\beta(z-a) - \sin(z-a)]. \quad (1.17)$$

Неизвестными величинами в (1.17) являются v_0, θ_0, Q_0 .

Для определения ΔQ , учитывая, что $\Delta Q = R_B$, составим уравнение равновесия в виде $\sum M_0 = 0$, откуда получим

$$Pv_0 - \Delta Q \cdot l = 0. \quad (1.18)$$

Граничные условия на опорах сводятся к следующему:

$$v(0) = 0 \text{ или } v_0 = \frac{\theta_0}{\beta} \sin \beta a = 0, v(a+l) = 0 \quad (1.19)$$

или

$$v_0 = \frac{\theta_0}{\beta} \sin \beta(a+l) - \frac{\Delta Q}{\beta^3 EJ} (\beta l - \sin \beta l) = 0 \quad (1.20)$$

Рассматривая уравнения 1.18 – 1.20 запишем условие ее ненулевого решения относительно неизвестных v_0, θ_0, Q_0 .

$$\begin{vmatrix} F & 0 & l \\ 1 & \frac{\sin \beta l}{\beta} & 0 \\ 1 & \frac{\sin \beta(a+l)}{\beta} & \frac{\beta l - \sin \beta l}{\beta^3 EJ} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.21)$$

Раскрывая определитель и учитывая, что $F = \beta^2 EJ$ (1.7), получим:

$$\beta l \sin \beta l (a+l) - \sin \beta a \sin \beta l = 0. \quad (1.22)$$

Из уравнения (1.22) можно найти критические силы для различных отношений a/l .

Так, при $a/l=0,5$ вместо (1.22) имеем

$$\beta l \sin(\beta \cdot 1,5l) - \sin(\beta \cdot 0,5l) \sin \beta l = 0. \quad (1.23)$$

Решая (1.23) подбором, находим $\beta l = 1,802$, откуда

$$F_k = \frac{1,802^2 EJ}{l^2}$$

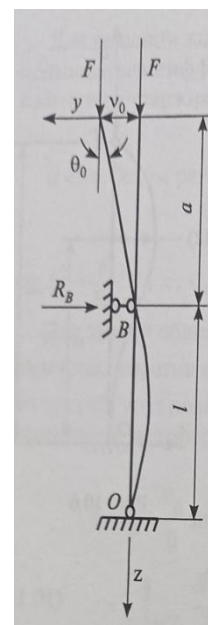


Рис.1.7

При $a/l=0, a=0$ (рис. 1.8, а) имеем:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

при $a/l = \infty, l = 0$ (рис. 1.8, б):

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2a)^2}$$

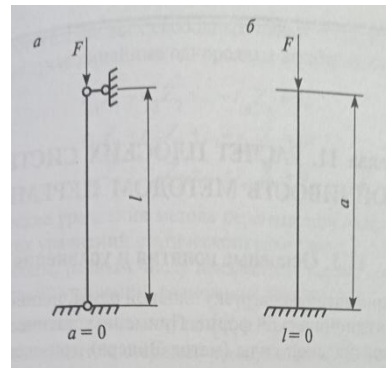


Рис.1.8

Литература

1. Pirnazarov, G. F., Mamurova, F. I., & Mamurova, D. I. (2022). Calculation of Flat Ram by the Method of Displacement. *EUROPEAN JOURNAL OF INNOVATION IN NONFORMAL EDUCATION*, 2(4), 35-39.
2. Begali o'g'li, A. E., & Ilhom o'g'li, M. E. (2022). TEMIR YO 'LLAR QURILISHIDA BETON VA TEMIRBETON VAZIFALARI. In " *ONLINE-CONFERENCES" PLATFORM* (pp. 246-249).
3. Фарходович, П. Ф. (2023, January). Вант Билан Кучайтирилган Шарнирсиз Арка. In " *ONLINE-CONFERENCES" PLATFORM* (pp. 16-19).
4. Pirnazarov, G. F., & ugli Azimjonov, X. Q. (2022). Determine the Coefficients of the System of Canonical Equations of the Displacement Method and the Free Bounds, Solve the System. *Kresna Social Science and Humanities Research*, 4, 9-13.
5. Mamurova, F. I., Khadjaeva, N. S., & Kadirova, E. V. (2023). ROLE AND APPLICATION OF COMPUTER GRAPHICS. *Innovative Society: Problems, Analysis and Development Prospects*, 1-3.
6. Mamurova, F. I. (2022, December). IMPROVING THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF FUTURE ENGINEERS AND BUILDERS. In *INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE" INNOVATIVE TRENDS IN SCIENCE, PRACTICE AND EDUCATION"* (Vol. 1, No. 4, pp. 97-101).
7. Odilbekovich, S. K., & Islomovna, M. F. (2023, January). Facilities and Devices of the Yale Farm. In *Interdisciplinary Conference of Young Scholars in Social Sciences* (pp. 21-23).
8. MAMUROVA, FERUZA ISLOMOVNA. "FACTORS OF FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCE IN THE CONTEXT OF INFORMATION EDUCATION." *THEORETICAL & APPLIED SCIENCE Учредители: Теоретическая и прикладная наука* 9 (2021): 538-541.
9. Islomovna, M. F., Islom, M., & Absolomovich, K. X. (2023). Projections of a Straight Line, the Actual Size of the Segment and the Angles of its Inclination to the Planes of Projections. *Miasto Przyszłości*, 31, 140-143.
10. Mamurova, F. I. (2022, December). IMPROVING THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF FUTURE ENGINEERS AND BUILDERS. In *INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE" INNOVATIVE TRENDS IN SCIENCE, PRACTICE AND EDUCATION"* (Vol. 1, No. 4, pp. 97-101).
11. Фарходович, П. Ф. (2023, January). Вант Билан Кучайтирилган Шарнирсиз Арка. In " *ONLINE-CONFERENCES" PLATFORM* (pp. 16-19).

12. Babakhanova, N. U. (2019). FEATURES OF ACCOUNTING IN RAILWAY TRANSPORT AND ITS PRIORITIES FOR ITS DEVELOPMENT. In WORLD SCIENCE: PROBLEMS AND INNOVATIONS (pp. 33-35).
13. Mamurova, F., & Yuldashev, J. (2020). METHODS OF FORMING STUDENTS'INTELLECTUAL CAPACITY. Экономика и социум, (4), 66-68.
14. Islomovna, M. F., Islom, M., & Absolomovich, K. X. (2023). Projections of a Straight Line, the Actual Size of the Segment and the Angles of its Inclination to the Planes of Projections. Miasto Przyszłości, 31, 140-143.
15. Mamurova, F. I. (2022, December). IMPROVING THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF FUTURE ENGINEERS AND BUILDERS. In INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE" INNOVATIVE TRENDS IN SCIENCE, PRACTICE AND EDUCATION" (Vol. 1, No. 4, pp. 97-101).
16. Islomovna, M. F. (2022). Success in Mastering the Subjects of Future Professional Competence. EUROPEAN JOURNAL OF INNOVATION IN NONFORMAL EDUCATION, 2(5), 224-226.
17. Shaumarov, S., Kandakhorov, S., & Mamurova, F. (2022, June). Optimization of the effect of absolute humidity on the thermal properties of non-autoclaved aerated concrete based on industrial waste. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2432, No. 1, p. 030086). AIP Publishing LLC.
18. Mamurova, F. I. (2021). The Concept of Education in the Training of Future Engineers. International Journal on Orange Technologies, 3(3), 140-142.
19. Islomovna, M. F. (2023). Methods of Fastening the Elements of the Node. EUROPEAN JOURNAL OF INNOVATION IN NONFORMAL EDUCATION, 3(3), 40-44.
20. Islomovna, M. F. (2023). Engineering Computer Graphics Drawing Up and Reading Plot Drawings. New Scientific Trends and Challenges, 120-122.
21. Torayeva, N. (2021). Physics-Mechanical Properties Of Irrigated Meadow Soils In Bukhara Region. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz), 3(3).
22. Jurayevich J. K., Sayfullayevich A. S. THE UNIQUE OF BUKHARA JEWS IN THE DYE INDUSTRY AND WEAVING CRAFT //Euro-Asia Conferences. – 2021. – Т. 1. – №. 1. – С. 48-53.
23. Абдуллаев С. С., Рафиева Н. А. Искусства древней Руси и средней Азии в духовном диалоге (исторический экскурс) //Вестник науки и образования. – 2020. – №. 21-2 (99). – С. 101-104.
24. Гошев И. И., Абдуллаев С. С. Торговые купола Бухары //Интернаука. – 2018. – №. 14-1. – С. 31-33.
25. Abdullayev S. S., Hamroyev J. B. Features of the Organization of Pedagogical Practice. – 2023.
26. Sayfullayevich A. S. Development and Dynamics of Bukhara Ornamental Art at the Modern Stage of Uzbekistan's Independence //Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress. – 2023. – Т. 2. – №. 2. – С. 31-35.