ДИФФЕРЕНСИАЛ ТЕНГЛАМАНИ ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ

Маматов Ш.С. Исроилов Р.З.
Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети

Аннотация. *Маълумки, кўплаб физик жараёнлар дифференциал тенгламалар орқали ифодаланади. Дифференциал тенгламаларни ҳар доим ҳам аналитик усулда ечишнинг имкони бўлавермайди. Шунинг учун турли тақрибий ва сонли усуллардан фойдаланилади. Мазкур ишда турли типдаги дифференциал тенгламаларни чекли элементлар усули билан ечиш алгоритмлари таҳлил қилинади.*

Калит сўзлар: *дифференциал тенглама, матрица, чекли айирма, тўр*

Чекли айирмалар усули билан аппроксимация қилишда

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_M \qquad (1)$$

ёйилмага кирган N_m базис функциялари бутун Ω соха бўйича битта ифода билан аниқланган.

Бу масалага муқобил ёндашув Ω сохани бир-бири билан кесишмайдиган кисм сохаларга ёки Ω^e элементларга ажратиш ва сунгда $\hat{\varphi}$ ни бўлакли-усулда, яъни ҳар бир кисм соҳа бўйича алоҳида-алоҳида аппроксимациялашдан иборат. У холда аппроксимациялаш жараёнида ишлатиладиган базис функциялар хам хар хил Ω^e кисм соха учун хар хил ифодалардан фойдаланиб булакли-куринишда аникланиши мумкин. Бундай ҳолда, аппроксимацияловчи тенгламаларга кирувчи аниқ интегралларни уларнинг ҳар бир кисм соха ёки элемент бўйича ҳиссасини йиғиш орқали олиш мумкин:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} \overline{W_l} R_{\Omega} d\Omega \qquad (2а)$$

$$\int_{\Omega} \overline{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} \overline{W_l} R_{\Gamma} d\Gamma \qquad (2б)$$

Бу ерда $\sum_{e=1}^{E} \Omega^e = \Omega$, $\sum_{e=1}^{E} \Gamma^e = \Gamma$, Е -бутун соха бўлинган кисм сохалар ва Γ^e - чегаранинг Γ да ётадиган Ω^e га тегишли қисмларнинг умумий сони. Шундай қилиб, Γ^e ни сакловчи йигинди, фақат бевосита чегарага қўшни бўлган Ω^e элементлар буйича амалга оширилади .

Агар кисм сохалар нисбатан содда шаклга эга бўлса ва бу кисм сохаларда базис функциялари бир хил тарзда аниқланган бўлса, у холда бундай кисм сохалардан ташкил топган мураккаб шаклли сохалар ҳолатида юқорида кўрсатилган усулда ишлаш жуда осон. Бу ғоя чекли элементлар усулининг асосий ғоясидр .

Дарҳақиқат, куриш мумкинки, олдинги бобда муҳокама қилинган чекли айирмалар усули жараёнлар фақат битта элементдан фойдаланилганда чекли элементлар усулининг хусусий ҳолидир.

Базис функцияларининг бўлакли аникланиши аппроксимацияланувчи функциялар ёки уларнинг ҳосилаларида узилишлар бўлиши мумкинлигини англатади. Юқори тартибли ҳосилаларда бундай узилишларга рухсат берилади ва биз улар ишлатиладиган формулани танлашга қандай таъсир қилишини кўрсатамиз .

Агар базис функциялари булакли аниқланса, уларга кўриб чиқилаётган элемент ва унга бевосита қўшни бўлган кисм сохалардан ташқари ҳамма жойда нолга тенг булувчи қандайдир кичик "қўллаб-кувватлаш" функцяларини мос куйиш фойдалидир. Кейинчалик кўрсатилгандек , бу охир-оқибат тасмали матрицали яқинлашувчи тенгламаларни олиш имконини беради, бу эса чекли элементлар усулига қўшимча афзаллик беради.

Чекли элементлар усулини кургазмали баён килиш учун $\Omega = [0, L_x]$ ораликда аникланган ихтиёрий $\varphi(x)$ функция учун яқинлашувчи функцияни қуришни кўриб чиқамиз. Ω сохани узаро кесишмайдиган $E(=M_a - 1)$ кичик сегментларга булиш Ω да $x_1 = 0$ ва $x_{M_n} = L_x$ булган $\{x_l; l = 1, 2, ..., M_n\}$ нукталар тупламини шунчаки танлаш орқали амалга оширилади. Ω^e элемент сифатида эса $x_e \le x \le x_{e+1}$ сегмент олинади.

1-расмда берилган $\varphi(x)$ функцияни хар бир элементда узгармас киймат кабул килувчи $\hat{\varphi}(x)$ функция оркали яқинлаштириш учун нуқтали коллокация усулидан фойдаланиш кўрсатилган. Олинган яқинлашиш $\varphi(x)$ элементларнинг кесишиш нуқталари $\{x_l; l = 2, 3, ..., M_n - 1\}$ да сакрашларга эга булган узилишли функция булади.

Бу нуқталар *тугунлар* деб аталади . Чекли элементлар жараёнларида тугунлар ва элементлар рақамланади. Бу ердаги расмда биз *m* тугун *m* элементига тегишли бўлганда, аниқ рақамлаш тизимини қабул қилдик . $\hat{\varphi}(x)$ фунцсияни (1) стандарт кўринишда ҳар бир *m* тугунга барча элементлар учун бир хил бўлган бўлакли-узгармас узилишли N_m *(глобал)* базис функциясини мос куйиш орқали ёзилиши мумкин. Бу N_m функция таърифига кўра, m элементда бирга тенг қийматни , қолган элементларда эса нолга тенг булади.

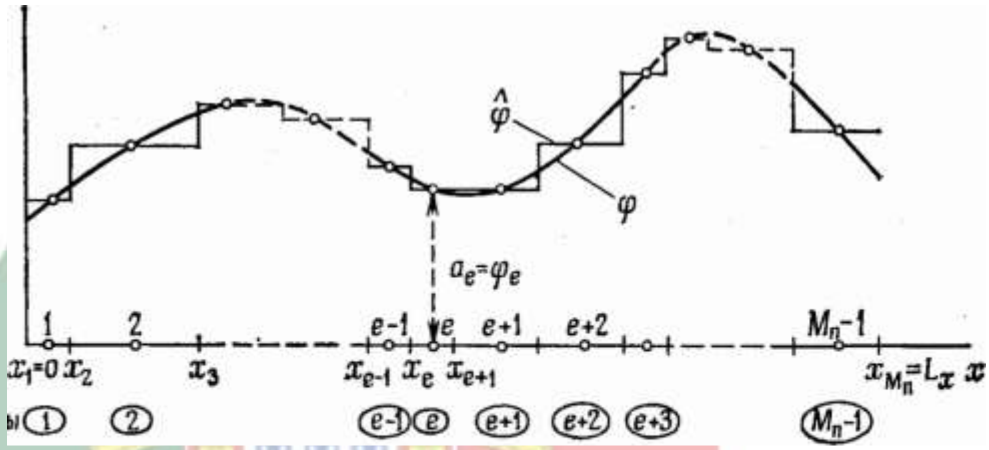
У холда Ω тупламда

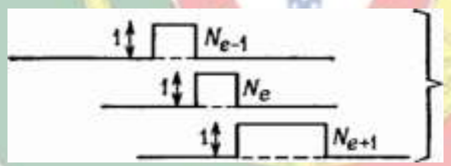
$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_{n-1}} \varphi_m N_m \tag{3a}$$

формулани ёзиш мумкин.

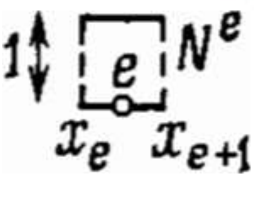
Тугунлар

Элементлар





Глобал базис функциялар



Элементнинг базис функцияси

1-расм. Бир ўзгарувчили функцияни нуктали коллакация усули билан бўлакли-ўзгармас элементлардан фойдаланиб аппросимациялаш

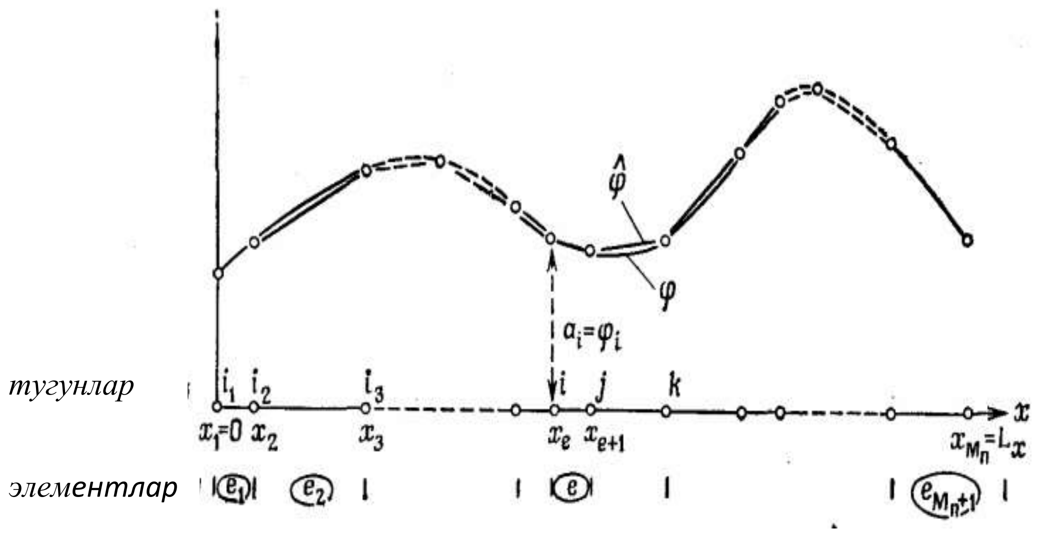
чунки $a_m = \varphi_m$, бу ерда φ_m - φ функциянинг m тугундаги қиймати. Шундай қилиб, чекли элементлар усулидан фойдаланганда, аппроксимация параметрлари тўлиқ тушунарли маънога эга. Бу ерда (1) формуладаги ихтиёрий ψ функция тушириб колдирилган ва натижада бу аппроксимация умуман олганда, сегментнинг $x=0, x=L_x$ чегара нуқталаридаги φ функция қийматига тенг бўлмайди. Бирок, бу тасвирлашда бу қийматлар $x=0, x=L_x$ чегараларга улашган элементларнинг узунлиги камайганда φ функция қийматига етарлича аниқ яқинлашади.

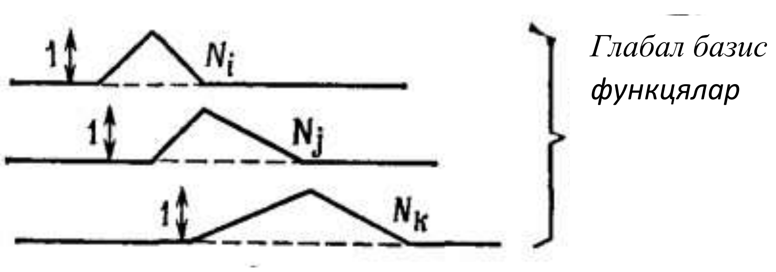
Хар бир e элементда (3а) глобал аппроксимация элемент тугунидаги φ_e қийматлар ва *элементнинг N^e базис функцияси оркали ифодаланиши мумкин.* Яьни e элементда

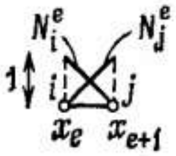
$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi_e N^e = \varphi_e \tag{3б}$$

Бу ерда N^e фақат e элемент учун аникланган ва бу элементда қийматни 1 га тенг булади.

1б-расмда $0 \le x \le L_x$ сегментнинг . элементларга юкоридаги бўлинишидан фойдаланади. Бирок, бу сафар, ҳар бир элементда x га чизиқли равишда боглик функция бўйича аппроксимациядан фойдаланиб , аникроқ яқинлашишга эришилади. Бундай ҳолда, (рақамланган) тугунлар кушни элементларнинг умумий нуқталари ҳисобланади ва аппроксимация ҳар бир i тугунга булакли-чизикли N_i глобал базис функциясини мос куйиш натижасида амалга оширилади .







Элементнинг базис фунцялари

2-расм. Бир ўзгарувчили функцияни нуктали коллокаця усули билан бўлакли-чизиқли элементлардан фойдаланиб аппроксимациялаш.

Бу глобал базис функциялар куйидаги хоссага эга: N_i i - тугун билан боғланган элементларда нолдан фаркли ва i - тугунда $N_i = 1$ ва бошқа барча тугунларда нолга тенг бўлади.

Агар коллокация нуқталари сифатида тугунлар қабул қилинса, у ҳолда глобал аппроксимацияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M_n} \varphi_m N_m \tag{4a}$$

Бу ерда φ_m - φ нинг m тугундаги қиймати. $x = 0$ ва $x = L_x$ тугунлардаги мос кийматларни куйиш оркали функця чегара нукталарда автоматик равишда керакли қийматларни кабул килади ва ψ функциядан аниқ фойдаланиш талаб қилинмайди. i *ва* j тугунлари бўлган ҳар бир e элементда аппроксимация иккита чизиқли N_i^e, N_j^e базис функциялар ва φ_i, φ_j тугун кийматлар ёрдамида

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi_i N_i^e + \varphi_j N_j^e \tag{4б}$$

коида билан ифодаланади. Ҳар бир элемент бўйича аппроксимациянинг чизиқли ўзгариши куриниб турибди, чунки элементнинг иккала базис функцияси ҳам чизиқли.

Ушбу иккита мисолдан кўриниб турибдики, чекли элементлар усулининг характерли хусусияти тугун ва элементларнинг рақамланиши ҳисобланади. Бу ерда рақамлаш усулини танлаш масаласига эътибор бермаймиз. Бирок, кейинчалик, тугун ва элементларни рақамлаш усули чекли элементларнинг аппроксимацияни қўллаш орқали олинган тенгламалар системаси матрицаси тасмасининг кенглигига таъсир қилиши кўрсатилади, бу ҳисоблаш нуқтаи назаридан муҳим бўлиши мумкин.

Кўриниб турибдики, аппроксимацияни қуриш учун ишлатиладиган иккита базис функциялари системаси тўлалик хусусиятига эга, яъни бўлаклар сонининг кўпайиши билан улар ёрдамида ҳар қандай етарли даражада яхши функцияни керакли даражадаги аниклик билан яқинлаштириш мумкин бўлади.

(3) ва (4) аппроксимациялар нуқтали колокация усули ёрдамида тузилган, аммо шунга ўхшаш ифодалар умумий вазнли тафовутлар усулидан фойдаланган ҳолда аппроксимацияларни қуриш учун ҳам ишлатилиши мумкин. 3-расмда, берилган битта ўзгарувчининг функцияси бўлакли-узгармас ва бўлакли-чизиқли элементлардан фойдаланган ҳолда Галёркин усули билан аппроксимацияланади. Галёркин процедурасидан фойдаланганимиз сабабли, ушбу мисолдаги вазн функциялари $W_l = N_i$ қоида бўйича олинади ва вазинли тафовутлар усулига кўра, аппроксимация тенгламалари

$$\int_0^1 N_l(\varphi - \hat{\varphi})dx = 0 \qquad (5)$$

шаклга эга булади. Бу ерда $\hat{\varphi}$ нинг (3а) ёки (4а) ифодасини алмаштириб,

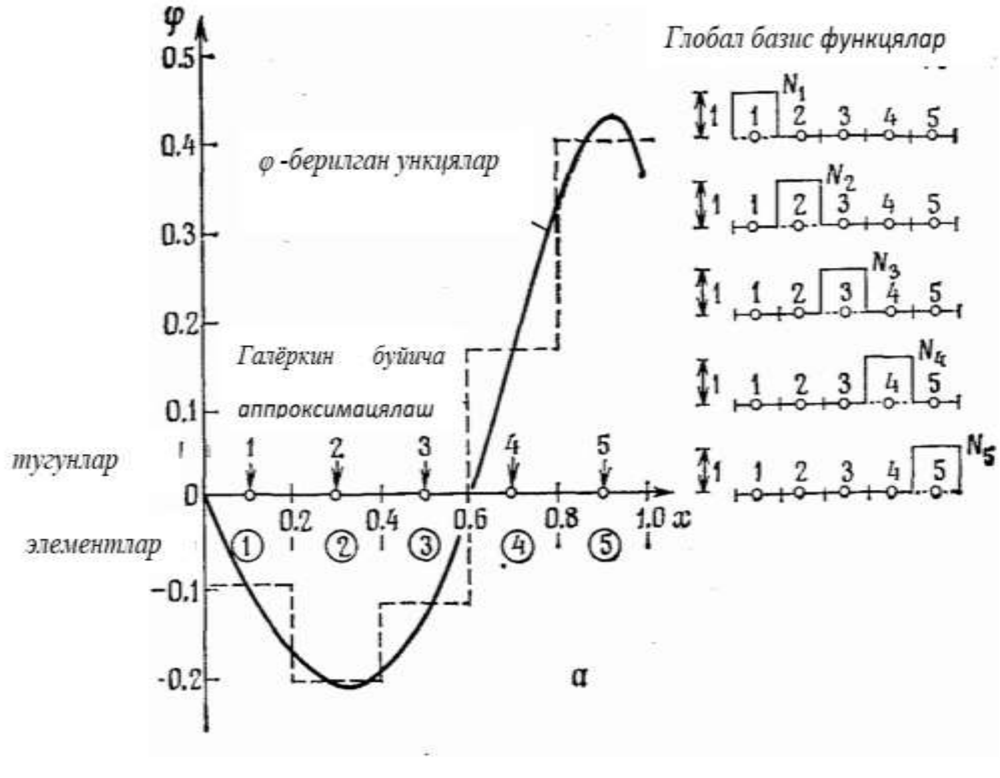
$$Ka = f \qquad (6)$$

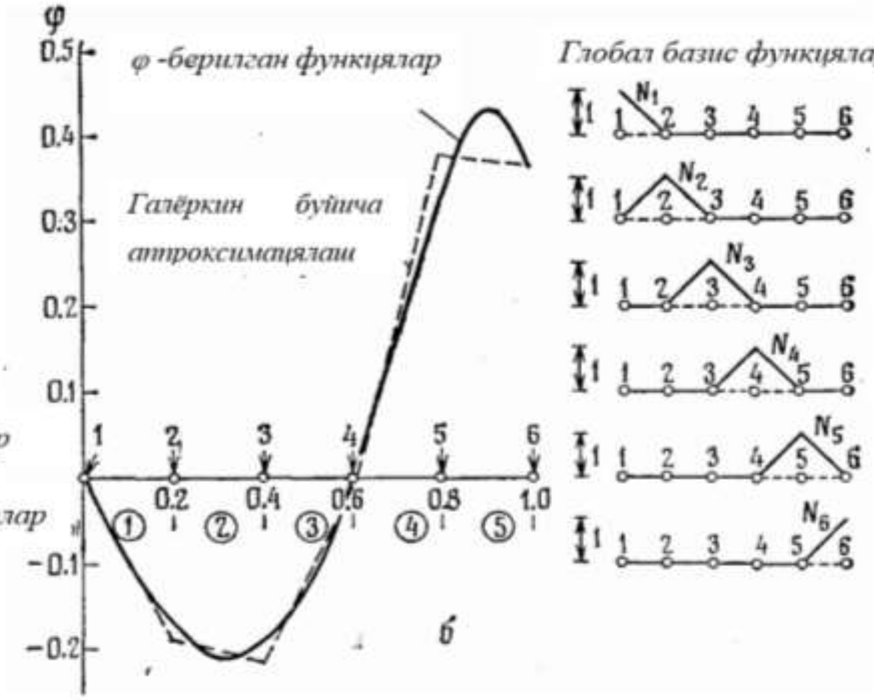
стандарт тенгламалар системасини хосил киламиз.Бу ерда

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l N_m dx \qquad f_l = \int_0^1 \varphi N_l dx \qquad (7а)$$

ва

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots). \qquad (7б)$$





3-расм. Бир ўзгарувчили функциясини Галёркин усули билан бўлакли-узгармас элементлар (а) ва (б) бўлакли-чизиқли элементлар ёрдамида аппроксимациялаш.

φ Векторнинг кампаненталари яна $\hat{\varphi}$ аппроксимациянинг тугун қийматлари булади ва шунинг учун берилган φ функциянинг тугун қийматларининг аппроксимациялари бўлади. (2) да таъкидланганидек, (7а) да кўрсатилган глобал интегралларни алоҳида элементларнинг ҳиссаларини йиғиш орқали ҳисоблаш мумкин, яъни.

$$K_{lm} = \sum_{l=1}^{E} K_{lm}^{e} \qquad f_l = \sum_{l=1}^{E} f_l^{e} \qquad (8)$$

бу ерда K_{lm}^{e} ва f_l^{e} фақат битта e элемент устида интеграллаш орқали топилади.

Булакли-узгармас базис функциялар билан аппроксимацияланганда, (6) система диагоналдир, чунки

$$N_l N_m = 0, l \neq m \qquad (9)$$

3а-расмда шу тарзда аппроксимация кўрсатилган. У ерда ишлатилган тугунлар ва элементларнинг рақамланишида ечим

$$\varphi_l = \left[\int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi dx \right] \left[\int_{x_l}^{x_{l+1}} dx \right]^{-1} \qquad (10)$$

куринишга эга булади.

Бўлакли-чизиқли функциялардан фойдаланган ҳолда юкоридаги функциянинг аппроксимацияси 3б-расмда кўрсатилган. Бу ерда қўлланиладиган тугунларни рақамлаш билан, (6) тенгламалар системаси энди 3 диагоналли ва симметрикдир. Бу ҳолда коеффициентлар матрицасини қандай қилиб энг яхши аниқлаш муҳокама қилинмайди, лекин 5-банддаги мисолларни кўриб чиққандан кейин аниқ бўлади